SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA

Nieznośna lekkość bytu Milana Kundery to wspaniała książka o miłości, duszy i lękach życia. Kundera uważa, że sensem istnienia jest pełne namiętności korzystanie z szans na chwile szczęścia i radości. Matematyka jako sztuka życia może być źródłem szczęścia i chwil pełnych radości.

Człowiek przeżywa wszystko po raz pierwszy i bez przygotowania. To tak jakby aktor grał przedstawienie bez żadnej próby.

Biorąc udział w spektaklu „Matematyka", spektaklu, który pisze życie możemy być jego biernymi obserwatorami, statystami, ale również sami możemy tworzyć nowe wątki, bawiąc się powoływać nowych bohaterów i przeżywać ich losy.

Ta niezwykła lekkość Matematyki użyta do opisywania i interpretowania naszej codzienności jest szanowana przez matematyków i pogardzana lub niedoceniana przez ludzi niezwiązanych z Królową Nauk.

Matematyka w swej istocie daje się poznać, smakować. Nie jest kapryśna, zazdrosna, zawsze łaskawa i stwarzająca nowe możliwości poznania. Obcowanie z matematyką możemy przeżywać wielokrotnie. Możemy się przygotować na spotkanie z matematyką. Matematyka wreszcie pozwala nam zrozumieć nasze niepowtarzalne jedyne życie.

W książce, którą Czytelniku trzymasz w ręku przedstawiłem kilka przykładów, jak Matematyka może pomóc w sytuacjach życia codziennego, zrozumieniu sztuki, czy podczas przyjemności związanych z podjęciem prawidłowych decyzji dotyczących zmagań duszy i ciała.

Zakładam, że Czytelnik posiada elementarną wiedzę z podstaw Matematyki na poziomie rozszerzonym liceum ogólnokształcącego.

Kolejne rozdziały są próbą pokazania i przekonania Czytelnika, że Matematyka jest kluczem do zrozumienia reguł rządzących nawet najprostszymi zdarzeniami. Opisałem działanie Matematyki w wielu zagadnieniach transportowych, sytuacjach społecznych – jak wieczory spędzone wspólnie z przyjaciółmi w kawiarniach czy pubach. Pomogę w podejmowaniu trudnych decyzji, opisując, jak zachować się w krytycznych sytuacjach np. pojedynki honorowe, jak zawierać ubezpieczenia i jakie mamy szanse na skuteczne rzucenie palenia. Czy rzeczywiście niektóre osoby posiadają szczególny dar, tzw.: postrzegania pozazmysłowego – to wyjaśnię w jednym z rozdziałów. Opisałem, jak Matematyka wpływała na rozwój sztuki i jak Matematycy i ich prace inspirowały artystów.

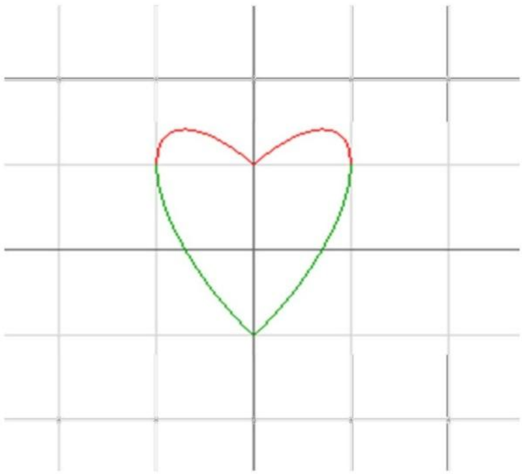
Na zakończenie pokazałem Matematykę w samej sobie – jak potrafi urzec i zaskoczyć jednocześnie swą prostotą, konsekwencją i żelazną logiką.

W tekście często będzie pojawiać się postać pana Jana – mieszkającego w tradycyjnym bloku w mieście średniej wielkości. Będzie on łącznikiem pomiędzy kolejnymi rozdziałami, a jego przygody i rozterki będą służyły do rozważań nad możliwościami wplecenia matematyki w zwykłe ludzkie losy.

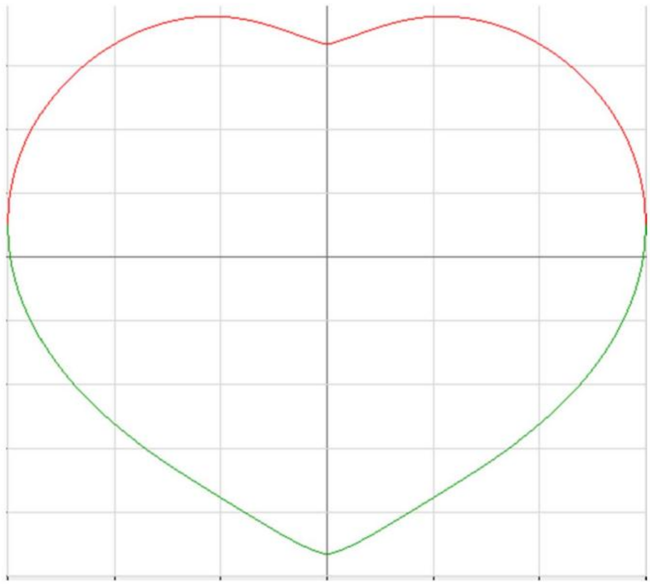
Kolejne tytuły rozdziałów poprzedziłem cytatami popularnych polskich piosenek, które kojarzą się z przedstawionymi zagadnieniami.

Aby nie pozostać gołosłownym już w przedmowie pokazałem, jak można wykorzystać elementarną znajomość Matematyki, aby uprzyjemnić sobie chwile spędzane z najbliższą sobie osobą.

Wystarczy objąć ją ramieniem i ofiarować… układ współrzędnych z naniesioną na nim krzywą o równaniu: $f(x) = |x| \pm \sqrt{1-x^2}$ (wersja dla szczupłych, wysmukłych i wysportowanych)



lub $f(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2 + |x| - 6}{x^2 + |x| + 2} \pm \sqrt{36 - x^2}\right)$ (wersja L i XL).



Życzę miłej lektury i z pokorą przyjmuję wszystkie krytyczne uwagi. Wszystkie błędy i pomyłki znajdujące się w tekście książki wynikają również tylko i wyłącznie z mojej niekompetencji.

Pragnę podziękować doc. Andrzejowi Justowi – dyrektorowi Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej za cenne merytoryczne uwagi i czas poświęcony na dokładną analizę rękopisu książki. Za doping i motywację bardzo dziękuję Rodzicom – bez ich wsparcia nie napisałbym tej pracy w skończonym czasie.

Autor

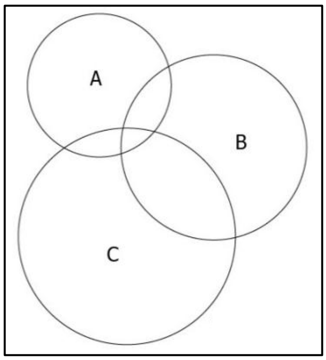
MATEMATYKA I POSTRZEGANIE POZAZMYSŁOWE

Wyobraźmy sobie przyjęcie, w którym uczestniczy pięć par. Nagle gasną światła i panowie proszeni są o natychmiastowe zabranie kobiet z sali balowej. Każdy pan bierze za rękę jedną z pań i w pośpiechu opuszczają imprezę.

W tym rozdziale zastanowimy się nad szansami zdarzenia, w którym każdy z panów wyjdzie nie ze swoja partnerką.

Opiszemy również pozornie nie mający nic wspólnego z poprzednim problemem proces, w którym matematyka pozwoli ocenić nasze zdolności postrzegania pozazmysłowego.

Na początku jednak przedstawmy trochę teorii. Przypomnijmy sobie doskonale znany wzór opisujący moc sumy zbiorów.



$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$

Wykażemy, że prawdziwa jest następująca:

Zasada włączania i wyłączania

Niech $A_1, A_2, ..., A_n$ będą zbiorami skończonymi. Wówczas:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... +$$

$$+(-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|.$$

Dowód:
Pokażemy, że, wykorzystując powyższy wzór, każdy element sumy zbiorów jest dokładnie raz liczony (brany pod uwagę) podczas zliczania elementów sumy.
Załóżmy, że element a jest zawarty w k zbiorach: $A_1, A_2, ..., A_k$.

Stosując wzór na sumę $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$ element ten jest liczony $k = \binom{k}{1}$ razy w sumie $|A_1| + |A_2| + ... + |A_k|$, liczony $\binom{k}{2}$ razy w sumie $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} |A_i \cap A_j|$ i ogólnie liczony $\binom{k}{m}$ razy w sumie $\sum_{i_1, i_2, ..., i_m = 1}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_m}.|$

Zatem, element a jest liczony $\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + ... + (-1)^{k+1}\binom{k}{k}$ razy przy użyciu wzoru na sumę $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$.
Z drugiej strony zauważmy, że wykorzystując twierdzenie Newtona, mamy:

$$(1-1)^k = \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - ..... + \binom{k}{k}(-1)^k = 1 - \left(\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + ... + \binom{k}{k}(-1)^{k+1} \right) = 0$$

co oznacza, że $\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + ... + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = 1.$

Zatem, każdy element jest zliczany dokładnie raz przy użyciu wzoru na sumę $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$.

Obecnie przedstawimy jedno z praktycznych zastosowań zasady włączania i wyłączania. Niech S będzie zbiorem $|S| = N$ i niech $c_1, c_2, ..., c_t$ oznaczają warunki lub własności spełniane przez pewne elementy zbioru S. Niektóre elementy zbioru S mogą spełniać więcej niż jedną z własności, inne mogą nie spełniać żadnych własności.
Niech A_i będzie podzbiorem zbioru S posiadającym własność $c_i : 1 \le i \le t$.
Niech $N(c_i)$ oznacza liczbę elementów zbioru S o własności $c_i : 1 \le i \le t$.

Niech $N(c_i, c_j)$ oznacza liczbę elementów zbioru S o własnościach $c_i, c_j : i \neq j$.

Następnie $N(c_i, c_j, c_k)$ oznacza liczbę elementów zbioru S posiadających (być może między innymi) własności: c_i, c_j, c_k.

Zauważmy, że

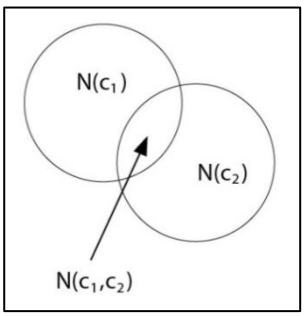
$$| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_t} | = N(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_t}) \cdot$$

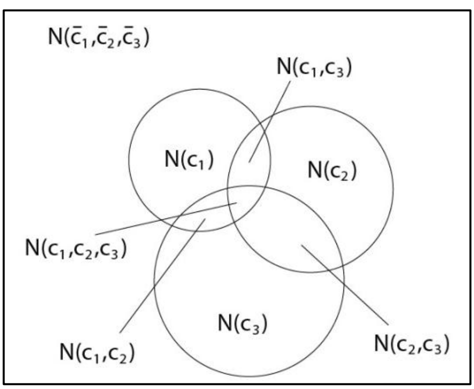
Wprowadźmy kolejne oznaczenia:

$N(\overline{c}_i) = N - N(c_i)$ liczba elementów zbioru S, które nie posiadają własności c_i.

$N(\overline{c}_i, \overline{c}_j)$ liczba elementów zbioru S, które nie posiadają żadnej z własności c_i lub c_j.

$\overline{N} = N(\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots, \overline{c}_t)$ liczba elementów zbioru S, które nie posiadają żadnej z własności $c_1, c_2, \ldots, c_t$.





Używając zasady włączania i wyłączania, wnioskujemy, że

$$N(\bar{c}_1,\bar{c}_2) = N - | A_1 \cup A_2 | = N - \left(N(c_1) + N(c_2) \right) + N(c_1 c_2)$$

oraz:

$$N(\bar{c}_1,\bar{c}_2,\bar{c}_3) = N - | A_1 \cup A_2 \cup A_3 | =$$
$$= N - \left(N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) \right) + \left(N(c_1,c_2) + N(c_1,c_3) + N(c_2,c_3) \right) - N(c_1,c_2,c_3)$$

Zatem, liczba elementów zbioru S nie posiadających żadnej z własności $c_i : 1 \le i \le t$ wynosi:

$$\bar{N} = N - | A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t | =$$
$$= N - \left[N(c_1) + N(c_2) + \ldots + N(c_t) \right] + \left[N(c_1,c_2) + N(c_1,c_3) + \ldots + N(c_{t-1},c_t) \right] +$$
$$- \left[N(c_1,c_2,c_3) + \ldots N(c_{t-2},c_{t-1},c_t \right] + \ldots + (-1)^t N(c_1,c_2,\ldots,c_t) =$$
$$= N - \sum_{1 \le i \le t} N(c_i) + \sum_{1 \le i < j \le t} N(c_i,c_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le t} N(c_i,c_j,c_k) + \ldots + (-1)^t N(c_1,c_2,\ldots,c_t)$$

Zauważmy jeszcze, że liczba elementów posiadających chociaż jedną z własności c_i wynosi:

$$N(c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_t) = N - \bar{N} \lim_{x \to \infty}.$$

Nadszedł już czas, aby powrócić na przyjęcie. Zostawiliśmy naszych bohaterów w chwili kiedy w pośpiechu parami opuszczali po ciemku salę. Obliczamy kolejno, że:

Panie z panami mogą wyjść na N = 5! = 120 sposobów.

Niech N(i) oznaczają liczbę tych sposobów opuszczenia przyjęcia, w których pani *i* wychodzi ze swoim partnerem: i = 1,2,3,4,5; $N(i) = 4!$

Niech N(i,j) oznaczają liczbę tych sposobów opuszczenia przyjęcia, w których para pań *i,j* wychodzi ze swoimi partnerami: *i,j = 1,2,3,4,5*; $N(i,j) = 3!$

Analogicznie przyjmiemy oznaczenia:

N(i,j,k) – trójka pań *i,j,k* opuszcza przyjęcie ze swoimi partnerami: $N(i,j,k) = 2!$

N(i,j,k,l) – czwórka pań *i,j,k,l* opuszcza przyjęcie ze swoimi partnerami: $\left(N(i,j,k,l) = 1! \right)$

oraz

N(1,2,3,4,5) – wszystkie panie opuszczają imprezę ze swoimi parterami: N(1,2,3,4,5) = 0!

Liczba sposobów, w których każda pani wychodzi z przyjęcia nie ze swoim partnerem równa się liczbie sposobów opuszczenia przyjęcia, zgodnie z wzorem wynosi:

$$N-\binom{5}{1}N(i)+\binom{5}{2}N(i,j)-\binom{5}{3}N(i,j,k)+\binom{5}{4}N(i,j,k,l)-\binom{5}{5}N(1,2,3,4,5)=$$
$$=120-5\cdot 24+10\cdot 6-10\cdot 2+5\cdot 1-1\cdot 1=44.$$

Zastanówmy się, na ile sposobów można opuścić przyjęcie tak, aby dokładnie jedna z pań wychodziła ze swoim partnerem.
Załóżmy, że tą szczęśliwą (?) panią jest pani *p*. Wtedy mamy do czynienia z problemem analogicznym do poprzedniego, tylko liczba par wynosi 4 zamiast 5.
Otrzymujemy:
Panie z panami mogą wyjść na N = 4! = 24 sposobów.
Niech N(i) oznaczają liczbę tych sposobów opuszczenia przyjęcia, w których pani *i* wychodzi ze swoim partnerem: i = 1,2,3,4; $N(i)=3!$
Niech N(i,j) oznaczają liczbę tych sposobów opuszczenia przyjęcia, w których para pań *i,j* wychodzi ze swoimi partnerami: *i,j = 1,2,3,4* ; $N(i,j)=2!$
Analogicznie przyjmiemy oznaczenia:
N(i,j,k) – trójka pań *i,j,k* opuszcza przyjęcie ze swoimi partnerami: $N(i,j,k)=1!$
N(1,2,3,4) – wszystkie panie opuszczają imprezę ze swoimi parterami: N(1,2,3,4) = 0!

Liczba sposobów na opuszczenie przyjęcia, w których tylko pani p wychodzi ze swoim partnerem wynosi zatem:

$$N-\binom{4}{1}N(i)+\binom{4}{2}N(i,j)-\binom{4}{3}N(i,j,k)+\binom{4}{4}N(1,2,3,4)=$$
$$=24-4\cdot 6+6\cdot 2-4\cdot 1+1\cdot 1=24-24+12-4+1=9.$$

W związku z tym, że mamy 5 pań, dostaniemy $5\cdot 9=45$ sposobów opuszczenia przyjęcia w taki sposób, że tylko jedna z pań będzie wychodzić ze swoim partnerem.

Aby obliczyć liczbę sposobów na opuszczenie przyjęcia w taki sposób, że dokładnie dwie panie są ze swoimi panami, ustalamy sobie, że będą to konkretne dwie osoby i stosujemy wzór na $\overline{N}$ dla przypadku 3 par.

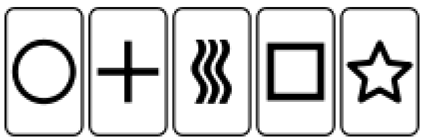
Dostaniemy wtedy $\binom{5}{2}\left(3!-\binom{3}{1}2!+\binom{3}{2}1!-\binom{3}{3}0!\right)=10(6-6+3-1)=20.$

Podobnie obliczymy, że dokładnie trzy panie opuszczą przyjęcie ze swoimi partnerami na 10 sposobów.

Nie istnieje żaden sposób na opuszczenie przyjęcia przez dokładnie cztery oryginalne pary i jest jeden sposób na wyjście tak, aby wszyscy pozostali ze swoimi partnerami.

Ostatecznie, szanse na opuszczenie przyjęcia w ten sposób, że każda pani wyjdzie nie ze swoim partnerem wynoszą $\frac{44}{120} = 0.366$.
Co najmniej w jednym przypadku na trzy opuścimy przyjęcie nie ze swoim partnerem.

Kolejnym zadaniem, którym zajmiemy się w tym rozdziale jest próba oceny zdolności postrzegania pozazmysłowego (E.S.P. Extra Sensory Perception) na podstawie, tzw. testu Zenera.
Karl Zener (1903-1964) oraz **Joseph Banks Rhine (1895-1980)** byli pionierami w próbach zjawisk parapsychologicznych metodą badań naukowych. Jak wspominali, do podjęcia tych badań skłonił ich odczyt **Artura Conan Doyle'a (1859-1930**) o spirytyzmie. W celu określenia paranormalnych zdolności osoby badanej poddawał ją następującemu testowi:
Osobie badanej pokazał 5 kart. Na kartach były przedstawione: okrąg, krzyż, fala, kwadrat i gwiazda. Następnie potasował karty i odkładał je na bok. Osoba badana miała za zadanie zgadnąć jaki symbol jest na każdej odłożonej karcie.



Zauważmy, że jest 5! = 120 możliwych rozkładów kart.
Zgodnie z przeprowadzonymi wcześniej obliczeniami wiemy, że:
średnio w 44 testach ze 120 przeprowadzonych nie odgadniemy żadnej karty, jedną odgadniemy poprawnie w 45 próbach,
dwie w 20,
trzy w 10 przypadkach i…
wszystkie 5 w jednym teście na 120 przeprowadzonych.
Możemy założyć zatem, że w jednej próbie testu prawdopodobieństwa poprawnego odgadnięcia i $i = 1,2,3,4,5$ kart wynoszą:

$P(1) = 45/120 = 0.375$

$P(2) = 20/120 = 0.166$

$P(3) = 10/120 = 0.083$

$P(4) = 0$

$P(5) = 1/120 = 0.0083$

$P(0) = 44/120 = 0.366$

Średnio w jednej próbie testu odgadniemy:

$$0 \cdot 0.366 + 1 \cdot 0.375 + 2 \cdot 0.166 + 3 \cdot 0.083 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0.0083 = 0.9975$$

Odchylenie standardowe wynosi 0.998.

Test przeprowadzamy pięciokrotnie. Zgodnie z regułą trzech sigm 69% badanych będzie miało wyniki w przedziale (0, 10) poprawnie odgadniętych kart.

Dopiero wynik powyżej 10 trafnie odgadniętych kart sytuuje nas w przedziale, który osiąga co najwyżej około 15% badanych. Aby stwierdzić, że posiadamy zdolności postrzegania pozazmysłowego należy zatem poprawnie odgadnąć więcej niż 10 kart w 25 próbach. Statystycznie powinno się to udawać około 15% badanych.

Zadania, które przedstawiamy w tym rozdziale są wariacją problemu znanego już w XVIII wieku. Niezależnie od siebie zajmowali się nim Mikołaj Bernoulli (1687-1759) oraz Leonard Euler (1707-1783).

Euler miał trzynaścioro dzieci. Po śmierci pierwszej żony poślubił jej przyrodnią siostrę.

Najsłynniejsze twierdzenie Eulera było wygłoszone w Petersburgu w obecności carycy Katarzyny podczas dyskusji z Denisem Diderotem o istnieniu Boga. Euler znany ze swej żarliwej religijności stwierdził w pewnym momencie:

Drogi Panie: $\frac{\left((a+b)^n\right)}{n} = x$***, a zatem… Bóg istnieje!***

Tym argumentem kompletnie zbił z tropu ateistę Diderota.

Mikołaj Bernoulli zajmował się teorią prawdopodobieństwa. Jako pierwszy w literaturze opisał, tzw. paradoks Petersburski, dotyczący średniej wygranej w grze polegającej na rzucaniu monetą do chwili otrzymania pierwszego orła. Znany jest również jako syn Mikołaja, wnuczek Mikołaja i kuzyn Mikołaja Bernoullich.

Zagadnienie opisywane przez Eulera i Bernoulliego oryginalnie brzmi następująco:

Mając do dyspozycji N napisanych listów i N zaadresowanych kopert na ile sposobów możemy włożyć po jednym liście do każdej koperty, aby w każdej z nich był niewłaściwy list.

Bardziej abstrakcyjnie możemy zapisać problem w sposób następujący:
Znajdź liczbę permutacji N elementów, w których żaden nie zajmuje swojej oryginalnej pozycji.

Euler zainteresowany tym zadaniem nazwał je *dziwnym problemem kombinatorycznym* i przedstawił proste rozwiązanie, które ze względu na niestandardowe podejście – omijamy. Przedstawimy rozwiązanie, korzystając z zasady włączania i wyłączania.

Oznaczymy małymi literami a,b,c,d,.. listy, zaś dużymi odpowiadające im koperty A,B,C,D,…

Liczbę sposobów na umieszczenie listów w nieodpowiednich kopertach oznaczamy przez $\overline{N}$. Weźmy pod uwagę grupę nieodpowiednich ułożeń listów, w których list a znajduje się w B, zaś list b znajduje się w A. Następnie weźmy pod uwagę wszystkie nieodpowiednie ułożenia listów, ale takie, że list a znajduje się w B, zaś list b nie znajduje się w A.

Pierwsza grupa zawiera $\overline{N-2}$ przypadków.

Aby obliczyć ile jest sposobów ułożenia listów w drugiej grupie, zamieńmy nazwy listów b,c,d,e oraz kopert A,C,D,E,… na listy a',b',c',d',.. oraz koperty A',B',C',D',… Od razu widać, że grupa ta zawiera $\overline{N-1}$ przypadków.

Zatem liczba przypadków nieodpowiedniego ułożenia listów, w których list a znajduje się w kopercie B wynosi: $\overline{N-2}+\overline{N-1}$.

Z uwagi na to, że przypadki a w kopercie C, a w kopercie D są równoliczne, otrzymamy:

$$\overline{N}=(N-1)\left(\overline{N-2}+\overline{N-1}\right).$$

Po elementarnych przekształceniach mamy:

$$\overline{N}-N\left(\overline{N-1}\right)=-1\left(\overline{N-1}-(N-1)(\overline{N-2})\right).$$

Wiemy, że $\bar{1}=0, \bar{2}=1$ oraz zgodnie z równaniem:

$$\overline{3}-3\cdot\overline{2}=-1(\overline{2}-2\cdot\overline{1})$$
$$\overline{4}-4\cdot\overline{3}=-1(\overline{3}-3\cdot\overline{2})$$
$$\overline{5}-5\cdot\overline{4}=-1(\overline{4}-4\cdot\overline{3})$$
....

$$\overline{N}-N\left(\overline{N-1}\right)=-1\left(\overline{N-1}-(N-1)(\overline{N-2})\right)$$

$$\overline{3}-3\cdot\overline{2}=-1(\overline{2}-2\cdot\overline{1})$$
$$\overline{4}-4\cdot\overline{3}=-1(\overline{3}-3\cdot\overline{2})=(-1)(-1)\left(\overline{2}-2\cdot\overline{1}\right)$$
$$\overline{5}-5\cdot\overline{4}=-1(\overline{4}-4\cdot\overline{3})=(-1)(-1)(-1)(\overline{2}-2\cdot\overline{1})$$
....

$$\overline{N}-N\left(\overline{N-1}\right)=-1\left(\overline{N-1}-(N-1)(\overline{N-2})\right)=(-1)^{N-2}(\overline{2}-2\cdot\overline{1})=(-1)^{n}.$$

Dzieląc przez N! dostajemy:

$$\frac{\overline{N}}{N!}-\frac{\overline{N-1}}{(N-1)!}=\frac{(-1)^N}{N!}.$$

Wstawiając w miejsce N kolejno 2,3,4,… N kolejno, mamy:

$$\frac{\overline{2}}{2!}-\frac{\overline{1}}{1!}=\frac{(-1)^2}{2!}$$
$$\frac{\overline{3}}{3!}-\frac{\overline{2}}{2!}=\frac{(-1)^3}{3!}$$
$$\frac{\overline{4}}{4!}-\frac{\overline{3}}{3!}=\frac{(-1)^4}{4!}$$
....

$$\frac{\overline{N}}{N!}-\frac{\overline{N-1}}{(N-1)!}=\frac{(-1)^N}{N!}.$$

Dodając stronami, dostaniemy:

$$\frac{\overline{N}}{N!}=\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+...+\frac{(-1)^N}{N!}.$$

Ostatecznie

$$\overline{N} = N!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^N}{N!}\right).$$

Zauważmy jeszcze, że $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ a w szczególności $e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.
Zatem dla odpowiednio dużych wartości N wyrażenie
$\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^N}{N!}\right)$ w przybliżeniu równe jest $\frac{1}{e}$.
Dla przykładu $\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^7}{7!}\right) = 0.36786 \approx \frac{1}{e} = 0.36788\ldots$
Nawet w przypadku n = 5 otrzymaliśmy wynik $\frac{44}{120} = 0.366 \approx \frac{1}{e}$.

Kończąc, wspomnijmy jeszcze o konfuzji i zakłopotaniu w jakie są wprowadzani matematycy uczestniczący w testach mierzących tzw. iloraz inteligencji. Jednym z typów zadań, które zawsze są składnikami testów, są zadania związane z podaniem kolejnego wyrazu ciągu, gdy dane jest pierwsze n wyrazów tej sekwencji.

Formalnie zadanie brzmi następująco:

Jaki jest kolejny wyraz ciągu, gdy dane są wyrazy: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$.
Z punktu widzenia matematyka, bowiem, to zadanie jest źle sformułowane i można podać nieskończenie wiele jego rozwiązań.
Wyobraźmy sobie, bowiem, wielomian:

$$\begin{aligned} W(x) = a_1 \frac{(x-2)(x-3)\ldots(x-k)}{(1-2)(1-3)\ldots(1-k)} + a_2 \frac{(x-1)(x-3)\ldots(x-k)}{(2-1)(2-3)\ldots(2-k)} + \cdots \\ + a_i \frac{(x-1)(x-2)\ldots\big(x-(i-1)\big)\big(x-(i+1)\big)\ldots(x-k)}{(i-1)(i-2)\ldots\big(i-(i-1)\big)\big(i-(i+1)\big)\ldots(i-k)} \\ + \cdots a_k \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-(k-1))}{(k-1)(k-2)\ldots(k-(k-1))} \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla i = 1,2,…,k mamy $W(i) = a_i$.
Rozwiązaniem zadania jest zatem wartość W(k+1).
Jednakże jeżeli weźmiemy pod uwagę dowolny wielomian P(x) i zbudujemy:

$$R(x) = W(x) + P(x) \cdot (x-1)(x-2)\ldots(x-i)\ldots(x-k)$$

to okaże się, że również dla i = 1,2,…,k mamy $R(i) = a_i$, a z dowolności wielomianu P(x) dostaniemy nieskończenie wiele rozwiązań naszego zagadnienia.

To chyba jeden z powodów, że matematycy generalnie tak słabo wypadają w testach na inteligencję.
Dodajmy jeszcze, że wielomian W(x) został skonstruowany zgodnie z tzw. wzorem interpolacyjnym Lagrange'a.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) jeden z pionierów turystyki matematycznej. Włoch, pracujący we Francji i dla Prus. Jako dziewiętnastolatek został profesorem matematyki w Szkole Artylerii w Turynie. Był młodszy od wszystkich swoich uczniów.

Na zakończenie podamy kilka przykładowych zadań, które mogą być rozwiązane przy użyciu narzędzi przestawionych w tym rozdziale.

1. Dwie osoby grają w następującą grę. Z talii kart wybieramy kiery i piki. Osoba A tasuje 13 kart pikowych i wykłada je kolejno. Osoba B po przetasowaniu swoich kart (kierowych) kolejno je wykłada. A wygrywa jeśli co najmniej 2 karty piki i kiery pokrywają się co do wartości.
2. Załóżmy, że nowy stadion Narodowy ma pojemność na 60.000 miejsc i wszystkie są oznaczone. Załóżmy, również, że wszystkie bilety są wyprzedane i kolejno przychodzący kibice siadają losowo na miejscach. Oblicz prawdopodobieństwo, że choć jedna osoba będzie siedziała na miejscu zgodnym z miejscem wydrukowanym na bilecie.