W każdej nauce jest tyle prawdy, ile jest w niej matematyki

Immanuel Kant

Przedmowa

Matematyka prowadzi równolegle dwa różne żywoty.
Z jednej strony jest żywą nauką, ciągle się rozwija, powstają nowe teorie, potrafimy udowadniać twierdzenia używając narzędzi z zaskakująco różnych dziedzin matematyki. Rocznie powstaje około 50000 prac matematycznych. Dumni autorzy cieszą się z indeksu cytowań , co oznacza, że ich praca jest pożyteczna, być może posłuży komuś innemu do napisania nowego, odkrywczego artykułu.

Tego rodzaju matematykę uprawiają naukowcy w zaciszu swoich gabinetów, pilnie strzegąc wyników swoich prac dopóki nie ukażą się one drukiem. Uważani za nieszkodliwych dziwaków, są bardzo cenieni za niskie koszty swojej pracy – jak ironicznie się uważa, matematyk to urządzenie zamieniające kawę, pączki, ołówek i papier w twierdzenia.

Z drugiej strony matematyka, z którą spotykamy się w szkole i na studiach.
Matematyka jakiej doświadczają ludzie nie związani z nią zawodowo objawia się jako przedmiot nauki szkolnej, który towarzyszy uczniom od szkoły podstawowej, aż po studia wyższe. Jest ona uważana powszechnie za trudną, niepotrzebną, nie mającą nic wspólnego z rzeczywistością i przede wszystkim martwą naukę. W zasadzie powiadamy, że znajomość elementarnej arytmetyki, podstaw geometrii wystarcza aby prowadzić swe życie nie cierpiąc z powodu braku innych umiejętności matematycznych.
Nie wstydzimy się przyznać do braku wiedzy, kompetencji związanych z matematyką. Twierdzimy stanowczo, że doskonale radzimy sobie bez niej, a formułki i twierdzenia, które poznaliśmy miały tylko wartość jako ćwiczenie uczenia się tekstu na pamięć.
Zresztą zapamiętany wiersz może się jeszcze gdzieś przydać, a wyrecytowanym z pamięci twierdzeniem Talesa nikomu nie zaimponujemy.

Trudno polemizować z takim powszechnym przekonaniem o skostnieniu, braku odniesienia do rzeczywistości i nieprzydatności matematyki.
Bezradni nauczyciele w obliczu ciągle zmniejszającej się liczby godzin lekcyjnych poświeconych przedmiotom ścisłym koncentrują się na realizacji minimum programowego

egzekwując wiedzę a nie kompetencje i umiejętności rozwiązywania praktycznych problemów.

Od czasu do czasu, budzi się jednak chęć sprzeciwu, protest przeciwko takiemu postrzeganiu matematyki i matematyków.

Stąd pomysł zaprezentowania matematyki z jaśniejszej strony księżyca. Książka ta jest próbą opisania wykorzystania matematyki w życiu codziennym a nawet uczuciowym. Bezpośrednią inspiracją do jej powstania były zajęcia, które prowadziłem w ramach tzw: Akademii Zastosowań Matematyki – otwartych wykładów i ćwiczeń dla wszystkich chętnych: niedowiarków, sceptyków a z drugiej strony dla grupki entuzjastów.

Wykłady z Zastosowań Matematyki odbywały się na Politechnice Łódzkiej.

Prowadząc Akademię nie byłem związany z żadnym programem, planem, liczbą godzin czy innymi ograniczeniami. Istniała dla przyjemności, chęci podzielenia się tym czego sami się nauczyliśmy bo jak mówił Hugo Steinhaus ***Matematyki się uczymy aby uczyć innych.***

Książka ta stanowi wybór z kilku pierwszych spotkań Akademii poświęconych **Matematyce w życiu uczuciowym** oraz zawiera kilka nowych tematów jak **Matematyka w sporcie, portfelu, sklepie.**

Osobny rozdziały są poświęcone **bezpiecznemu przesyłaniu informacji, obecności matematyki w lingwistyce i prawu Benforda.** Obecnie analiza Benforda stanowi popularne narzędzie przy wykrywaniu oszustw w podatkach, czy kreatywnej księgowości .

Mam nadzieję, ze książka może trafić do szerokiego grona Czytelników. W przypadku większości rozdziałów znajomość matematyki na poziomie szkoły licealnej z rozszerzonym programem matematyki jest wystarczającym poziomem wiedzy aby zgłębić tematy przedstawione w **Matematyce nie tylko dla zakochanych**.

W każdym rozdziale, o ile jest taka potrzeba podane są informacje uzupełniające oraz bibliografia. Wymienione są pozycje książkowe, artykuły, które zainspirowały mnie do poruszenia danego tematu.

Chciałbym również w tym miejscu złożyć podziękowania recenzentowi książki doc. dr Andrzejowi Justowi, który podjął się trudu uważnego jej przeczytania i zechciał podzielić się ze mną cennymi uwagami.

Z nadzieją, że wybór zagadnień przekona Czytelnika, że warto zwracać uwagę na obecność matematyki w życiu codziennym, osobistym, zawodowym i uczuciowym…zapraszam do lektury.

Autor

WSZYSTKIE OCZY ŚWIATA

Zobaczyłem i zadrżałem,
jeszcze takich nie widziałem:
brzydkie -

patrzą jakoś tak daleko,
że zielone, to co z tego:
brzydkie.

Nie rozumiem: dzień się toczy,
ja wciąż widzę twoje oczy
brzydkie -

do niczego niepodobne,
takie brzydkie, niech gęś kopnie,
brzydkie.

W twoich oczach, kochana, jedyna,
coś być musi, na pewno coś masz,
chcę zapomnieć i nie zapominam,
ciągle widzę i oczy, i twarz.

Choćbym świat cały wkoło przemierzył,
choćbym szukał już sam nie wiem gdzie,
od twych brzydkich nie znajdę piękniejszych
i tak rzewnych i wiernych jak twe.

I zmieniłem w końcu zdanie,
widzę, że są niesłychanie
piękne -

twoje oczy jak dwie świeczki,
twoje oczy jak gwiazdeczki
piękne.

Twoje oczy wszystko widzą,
twoje oczy dla mnie świecą
piękne;

każdy wieczór taki miły,
nad mym życiem się schyliły -
piękne.

Tak pisał Gałczyński o oczach swojej dziewczyny.
Jesteśmy pod wrażeniem piękna koloru oczu. Zwracamy uwagę na oczy podczas każdej okoliczności, mamy ulubione kolory, pamiętamy , wspominamy oczy wyjątkowo śliczne. Dla niektórych właśnie oczy są tym czynnikiem, który ma największą wagę przy subiektywnej, estetycznej ocenie naszej osoby.
Z formalnego punktu widzenia obowiązująca obecnie klasyfikacja rozróżnia 16 typów koloru oczu klasyfikowanych ze względu na intensywność barw.
Rozróżniamy oczy:

i) ciemne - w skali od 1 do 16 zajmujące miejsca 1-4,
ii) ciemno-mieszane, (4-6)
iii) mieszane (6-12),
iv) jasne-mieszane oraz jasne (12-16)

Ze względu na kolor rozróżniamy oczy:

a) brązowe a wśród nich: ciemnobrązowe (tzw. czarne oczy), jasnobrązowe (złote)
b) piwne
c) bursztynowe (kocie oczy, oczy koloru whisky)
d) zielone
e) niebieskie
f) szare
g) fioletowe

Oczywiście niektóre kolory oczu są bardziej dominujące od innych. Mieszkańcy Skandynawii słyną z niebieskich oczu. Zielone oczy są powszechne w Irlandii a piwne oczy to cecha charakterystyczna Słowian.

W obecnym rozdziale zajmiemy się rozwiązaniem problemu, dotyczącego poznania wszystkich oczu świata.

Wyobraźmy sobie, że jesteśmy miłośnikami damskich (męskich) oczu i zastanawiamy się ile paniom (panom) należy głęboko spojrzeć w oczy aby ujrzeć wszystkie z możliwych 16 typów oczu. Zakładamy dla uproszczenia, że natura równomiernie obdzieliła nas różnymi typami oczu. Inaczej mówiąc szanse na zobaczenie kogoś reprezentującego dany typ wynoszą zawsze 1/16.

Sformułujmy zatem nasze zadanie.

Ile pań (panów) powinno pokazać nam swoje oczy, aby stwierdzić, że zobaczyliśmy wszystkie 16 typów oczu występujących na świecie. Zakładamy, ze dystrybucja wszystkich typów jest równomierna.

Oczywiście rozpoczynając badania i spoglądając w oczy pierwszej pani z pewnością ujrzymy nowy typ oczu. Zatem liczba osób, którym należy spojrzeć w oczy aby poznać pierwszy kolor oczu wynosi 1.

Następnie obliczymy ile wynosi średnia liczba pań, którym powinniśmy spojrzeć w oczy aby dostrzec nowy (drugi) kolor oczu. Oczywiście szanse na spotkanie pani z dotychczas nieznanym nam kolorem oczu wynosi 15/16. Prawdopodobieństwo, że pierwsza ujrzana pani będzie posiadać nowy kolor oczu wynosi zatem 15/16

Może się zdarzyć, że pierwsza spotkana ma taki kolor oczu, który już znamy (szanse na to wynoszą 1/16) i dopiero druga posiada nowy kolor. Szanse na zdarzenie tego typu wynoszą: $\frac{1}{16}\cdot\frac{15}{16}$.

Generalnie, jeżeli dopiero pani n-ta posiada nowy nieznany nam kolor oczu (w tym wypadku drugi) to takie zdarzenie może się pojawić z prawdopodobieństwem:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\frac{15}{16}.$$

Średnia liczba pań, którym będziemy spoglądać w oczy z nadzieją na odkrycie nowego koloru (drugiego) jest określona przez następujące wyrażenie:

$$1\cdot\frac{15}{16}+2\frac{1}{16}\cdot\frac{15}{16}+3\left(\frac{1}{16}\right)^2\frac{15}{16}+....+n\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\frac{15}{16}+....=\sum_{n=1} n\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\frac{15}{16}$$

gdyż zgodnie z definicją wartości oczekiwanej zmiennej losowej iloczyn $\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\frac{15}{16}$ przedstawia prawdopodobieństwo zdarzenia odpowiadającego wartości X = n , gdy zmienna losowa X oznacza liczbę pań, którym należy się przyjrzeć, aby ujrzeć nowy do tej pory niedostrzeżony kolor oczu.

Gdy znany już dwa kolory oczu i czekamy na trzeci kolor, to pojawi nam się on wraz z pierwszą kolejno napotkaną panią z prawdopodobieństwem 14/16, z drugą z prawdopodobieństwem $\frac{2}{16}\cdot\frac{14}{16}$, z n-tą z prawdopodobieństwem $\left(\frac{2}{16}\right)^{n-1}\frac{14}{16}$.

Średnia liczba pań, którym należy spojrzeć w oczy aby odkryć trzeci kolor wynosi wobec powyższego:

$$1\cdot\frac{14}{16}+2\frac{2}{16}\cdot\frac{14}{16}+3\left(\frac{2}{16}\right)^2\frac{14}{16}+....+n\left(\frac{2}{16}\right)^{n-1}\frac{14}{16}+....=\sum_{n=1}n\left(\frac{2}{16}\right)^{n-1}\frac{14}{16}$$

Przeprowadzając podobne rozumowanie stwierdzimy, że należy średnio spojrzeć w oczy $\sum_{n=1}n\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1}\frac{13}{16}$ paniom aby odkryć czarty kolor.

Generalnie suma $\sum_{n=1}n\left(\frac{k-1}{16}\right)^{n-1}\frac{16-(k-1)}{16}$ będzie określać średnią liczbę pań, którym spojrzymy w oczy aby odkryć nowy kolor oczu, gdy znamy już k-1 kolorów oczu.

Liczba pań, których oczy trzeba obejrzeć aby poznać wszystkie 16 kolorów oczu będzie sumą:

liczby pań pozwalających na odkrycie pierwszego koloru – 1

liczby pań pozwalających na odkrycie drugiego koloru - $\sum_{n=1}n\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\frac{15}{16}$

liczby pań pozwalających na odkrycie trzeciego koloru - $\sum_{n=1}n\left(\frac{2}{16}\right)^{n-1}\frac{14}{16}$

czwartego - $\sum_{n=1}n\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1}\frac{13}{16},\ldots,$

k-tego - $\sum_{n=1}n\left(\frac{k-1}{16}\right)^{n-1}\frac{16-(k-1)}{16},\ldots,$

szesnastego - $\sum_{n=1}n\left(\frac{15}{16}\right)^{n-1}\frac{1}{16}$

Ostatecznie aby poznać wszystkie kolory oczu świata powinniśmy głęboko przyjrzeć się:

$$1+\sum_{n=1}n\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\frac{15}{16}+\sum_{n=1}n\left(\frac{2}{16}\right)^{n-1}\frac{14}{16}+\sum_{n=1}n\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1}\frac{13}{16}+\ldots$$

$$+\ldots+\sum_{n=1} n\left(\frac{k-1}{16}\right)^{n-1}\frac{16-(k-1)}{16}+\ldots+\sum_{n=1} n\left(\frac{15}{16}\right)^{n-1}\frac{1}{16}\text{ paniom.}$$

Spróbujmy obecnie obliczyć poszczególne sumy.

W tym celu skoncentrujemy się na sumie szeregu

$$\sum_{n=1} nx^{n-1} = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$$

Jest to szereg zbieżny dla $x \in (-1,1)$. Oznaczmy jego sumę przez $S(x)$.

Zauważmy, że w tym przypadku możliwe jest całkowanie sumy wyraz po wyrazie co w konsekwencji prowadzi to następującej relacji:

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x \sum_{n=1} nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}\int_0^x nx^{n-1}dx = \sum_{n=1} x^n\Big|_0^x = \sum_{n=1} x^n = x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots = \frac{x}{1-x}$$

Z równości: $\int_0^x S(x)dx = \frac{x}{1-x}$ wynika, że $S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

W naszym szczególnym przypadku:

$$\sum_{n=1} n\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\frac{15}{16} = \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{(1-1/16)^2} = \frac{16}{15}$$

$$\sum_{n=1} n\left(\frac{2}{16}\right)^{n-1}\frac{14}{16} = \frac{14}{16}\cdot\frac{1}{(1-2/16)^2} = \frac{16}{14}$$

$$\sum_{n=1} n\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1}\frac{13}{16} = \frac{13}{16}\cdot\frac{1}{(1-3/16)^2} = \frac{16}{13}$$

$$\sum_{n=1} n\left(\frac{k-1}{16}\right)^{n-1}\frac{16-(k-1)}{16} = \frac{16-(k-1)}{16}\cdot\frac{1}{(1-(k-1)/16)^2} = \frac{16}{16-(k-1)}$$

$$\sum_{n=1} n\left(\frac{15}{16}\right)^{n-1}\frac{1}{16} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(1-15/16)^2} = \frac{16}{1}$$

Zatem średnia liczba pań, którym spoglądamy w oczy aby poznać wszystkie kolory oczu świata wynosi:

$$\frac{16}{16}+\frac{16}{15}+\frac{16}{14}+\frac{16}{13}+...+\frac{16}{1}=16\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{16}\right)$$

Zanim podamy ostateczną odpowiedź zaproponujemy bardzo efektywny sposób na liczenie sumy ułamków będących sumą częściową szeregu harmonicznego $\sum_{n=1}\frac{1}{n}$ czyli sum typu: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$

Spróbujemy wykazać, że: $1+1/2+1/3+....1/n \to \ln n+\gamma$ gdzie $\gamma = 0.577215....$

Zauważmy, że bezpośrednio z interpretacji geometrycznej całki oznaczonej wynika:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} \le \int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1} \ge \int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln x$$

Wobec powyższego mamy:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} \le \ln n \le 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}$ co implikuje:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} \le 1+\ln n$ dając

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n \le 1$$

oraz

$\frac{1}{n}+\ln n \le 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$ dając

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n \ge \frac{1}{n}$$

Zatem ciąg: $\frac{1}{n} \le S_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n \le 1$ jest ograniczony.

Aby rozstrzygnąć istnienie granicy ciągu należy pokazać jeszcze jego monotoniczność. W tym celu badamy znak różnicy:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{1+1/n} - \ln\left(1 + 1/n\right))$$

Weźmy pod uwagę funkcję: $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}, \; x \ge 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2} > 0$ dla dodatnich wartości argumentu.

Oznacza to, że funkcja $f(x), x > 0$ jest rosnąca oraz w szczególności

$f(x) \ge f(0) = 0, x \ge 0$

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \ge 0 \to \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \le 0 \to \frac{1/n}{1+1/n} \le \ln(1+1/n)$$

Wnioskujemy zatem, że ciąg S_n jest malejący, oraz zachodzi:

$$\frac{1}{n} \le S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \le 1$$

W konsekwencji wiedząc, że granica S_n istnieje otrzymujemy, że

$$0 \le \lim_{n\to\infty} S_n = \gamma < 1$$

Granica ta nazywana jest stałą Eulera, wynosi w przybliżeniu 0.577215.

Ciekawostką, jest, że do tej pory (począwszy od 1735 r. kiedy po raz pierwszy została podana) nierozstrzygniętym pozostaje problem wymierności (niewymierności) tej liczby. Nie wiadomo również, czy jest to liczba algebraiczna tzn. czy jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach wymiernych.

W naszym przypadku, gdy chcemy zobaczyć wszystkie kolory oczu świata musimy się przyjrzeć średnio $16\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{16}\right) \approx 16(\ln 16 + 0.577215) = 53.596 \approx 54$ paniom.

Jako ćwiczenie pozostawimy rozstrzygnięcie problemu ilu panom należy w czasie mroźnej zimy zdjąć czapki, aby poznać wszystkie kolory włosów świata zakładając, że każdy z nich ma takie szanse na posiadanie któregoś z 11 możliwych kolorów i natura w swej łaskawości nie pozwala nikomu wyłysieć.
Oficjalnie zarejestrowane możliwe kolory włosów to:

a) biały,
b) jasny blond,
c) kasztanowy,
d) rudy,
e) rudoblond,
f) ciemny blond,
g) jasnobrązowy,
h) siwy,
i) brązowy,
j) ciemnobrązowy,
k) czarny

Bibliografia

2. Fan S, Dyer CR, Hubbard L *Quantification and correction of iris color* University of Wisconsin-Madison 2003
3. Frost Peter *European hair and eye color – a case of frequency dependent sexual selection* Evolution and Human Behavior 2006, vol. 27 , 85-103